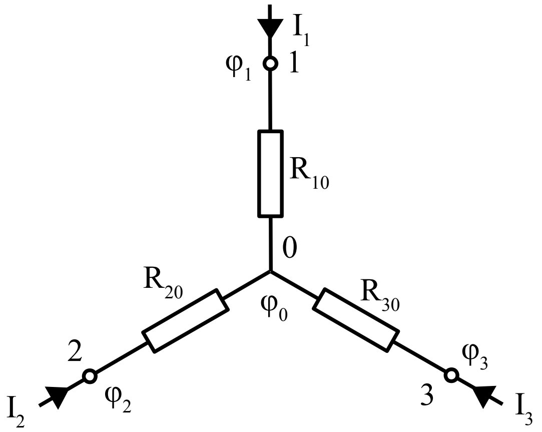
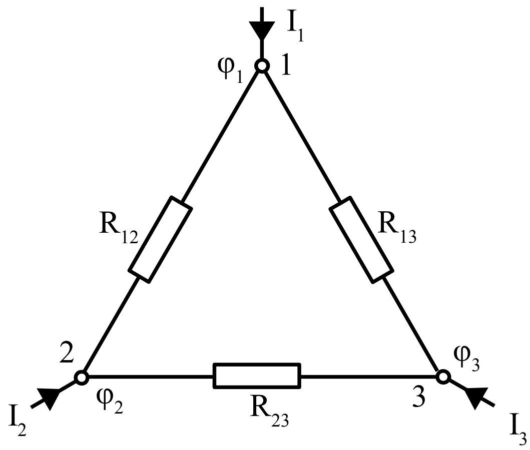
Stern – Dreieck - Umformung

Die Stern- bzw. Dreieckschaltung läßt sich mit den Umformungen der Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen nicht vereinfachen.
Die beiden Schaltungen können jedoch ineinander übergeführt werden. Im Folgenden soll die Umrechnung der Widerstände der Sternschaltung in die der Dreieckschaltung (und umgekehrt) hergeleitet werden.



Sternschaltung



Dreieckschaltung

Berechnung der Dreieckswiderstände aus einer gegebenen Sternschaltung

Die beiden Schaltungen können als gleichwertig angesehen werden, wenn bei gleichen Klemmenpotentialen auch die gleichen Klemmenströme fließen.
In der Sternschaltung gilt nach dem ohm'schen Gesetz:

$$I_1=\frac{U_{10}}{R_{10}}=\frac{\varphi_1-\varphi_0}{R_{10}}$$
$$I_2=\frac{U_{20}}{R_{20}}=\frac{\varphi_2-\varphi_0}{R_{20}} \qquad \text{Gl. 1}$$
$$I_3=\frac{U_{30}}{R_{30}}=\frac{\varphi_3-\varphi_0}{R_{30}}$$

Die Knotenregel besagt außerdem für den Sternpunkt (Knoten 0):

$$I_1+I_2+I_3=0$$

Setzt man die Ströme I_1 .. I_3 ein ergibt sich:

$$\frac{\varphi_1-\varphi_0}{R_{10}}+\frac{\varphi_2-\varphi_0}{R_{20}}+\frac{\varphi_3-\varphi_0}{R_{30}}=0$$

oder

$$\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}}-\varphi_0\cdot\left(\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}}\right)=0 \qquad \text{Gl. 2}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}}=\frac{1}{R_0}$ entspricht dem Leitwert der Parallelschaltung aller drei Sternwiderstände (Sternleitwert). Mit dieser Abkürzung wird Gleichung 2 zu

$$\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}}-\frac{\varphi_0}{R_0}=0$$

bzw.

$$\varphi_0=R_0\cdot(\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}}) \qquad \text{Gl. 3}$$

Setzt man das so ermittelte Sternpunktpotential φ_0 in die Gleichungen 1 für die Zweigströme ein, so lassen sich die Ströme durch die Potentiale an den Anschlüssen und die (bekannten) Widerstände ausdrücken.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varphi_1-\varphi_0}{R_{10}} = \frac{\varphi_1}{R_{10}}-\frac{R_0}{R_{10}}\cdot(\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}})\\
I_2 &= \frac{\varphi_2-\varphi_0}{R_{20}} = \frac{\varphi_2}{R_{20}}-\frac{R_0}{R_{20}}\cdot(\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}})\\
I_3 &= \frac{\varphi_3-\varphi_0}{R_{30}} = \frac{\varphi_3}{R_{30}}-\frac{R_0}{R_{30}}\cdot(\frac{\varphi_1}{R_{10}}+\frac{\varphi_2}{R_{20}}+\frac{\varphi_3}{R_{30}})
\end{aligned}$$

oder sortiert nach den Klemmenpotentialen $\varphi_1 .. \varphi_3$

$$\begin{aligned}
I_1 &= +\varphi_1\cdot(\frac{1}{R_{10}}-\frac{R_0}{R_{10}^2})-\varphi_2\cdot\frac{R_0}{R_{10}\cdot R_{20}}-\varphi_3\cdot\frac{R_0}{R_{10}\cdot R_{30}}\\
I_2 &= -\varphi_1\cdot\frac{R_0}{R_{10}\cdot R_{20}}+\varphi_2\cdot(\frac{1}{R_{20}}-\frac{R_0}{R_{20}^2})-\varphi_3\cdot\frac{R_0}{R_{20}\cdot R_{30}} \qquad \text{Gl. 4}\\
I_3 &= -\varphi_1\cdot\frac{R_0}{R_{10}\cdot R_{30}}-\varphi_2\cdot\frac{R_0}{R_{20}\cdot R_{30}}+\varphi_3\cdot(\frac{1}{R_{30}}-\frac{R_0}{R_{30}^2})
\end{aligned}$$

In der Dreieckschaltung lassen sich die gleichen Ströme wie folgt angeben (nach Knotenregel und ohm'schem Gesetz) und ebenfalls nach Klemmenpotentialen sortieren:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_{12}}+\frac{\varphi_1-\varphi_3}{R_{13}} = +\varphi_1\cdot(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{13}})-\varphi_2\cdot\frac{1}{R_{12}}-\varphi_3\cdot\frac{1}{R_{13}}\\
I_2 &= \frac{\varphi_2-\varphi_1}{R_{12}}+\frac{\varphi_2-\varphi_3}{R_{23}} = -\varphi_1\cdot\frac{1}{R_{12}}+\varphi_2\cdot(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}})-\varphi_3\cdot\frac{1}{R_{23}} \qquad \text{Gl. 5}\\
I_3 &= \frac{\varphi_3-\varphi_2}{R_{23}}+\frac{\varphi_3-\varphi_1}{R_{13}} = -\varphi_1\cdot\frac{1}{R_{13}}-\varphi_2\cdot\frac{1}{R_{23}}+\varphi_3\cdot(\frac{1}{R_{23}}+\frac{1}{R_{13}})
\end{aligned}$$

Wenn nun Dreieck und Sternschaltung das gleiche Verhalten zeigen sollen, so müssen die entsprechenden Koeffizienten der Klemmenpotentiale in Gl. 4 und Gl. 5 identisch sein. Durch Koeffizientenvergleich lassen sich so die Bestimmungsgleichungen der Stern – Dreieck – Umwandlung angeben.

Wir suchen uns aus den möglichen Koeffizienten solche aus, bei denen die gesuchten Dreieckswiderstände R_{12} , R_{13} und R_{23} vorkommen:

z.B. aus der Gleichung für I_1 die Koeffizienten von φ_2 für R_{12}

$$\frac{R_0}{R_{10} \cdot R_{20}} = \frac{1}{R_{12}} \qquad => \qquad \boxed{R_{12} = \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_0}}$$

aus der Gleichung für I_2 die Koeffizienten von φ_3 für R_{23}

$$\frac{R_0}{R_{20} \cdot R_{30}} = \frac{1}{R_{23}} \qquad => \qquad \boxed{R_{23} = \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_0}}$$

aus der Gleichung für I_3 die Koeffizienten von φ_1 für R_{13}

$$\frac{R_0}{R_{10} \cdot R_{30}} = \frac{1}{R_{13}} \qquad => \qquad \boxed{R_{13} = \frac{R_{10} \cdot R_{30}}{R_0}}$$

Die umrahmten Formeln ermöglichen es uns, bei einer gegebenen Sternschaltung die Widerstände einer Klemmenäquivalenten Dreieckschaltung zu berechnen.

Die Formeln zeigen eine Systematik:
Der Dreieckswiderstand zwischen zwei Knoten ergibt sich aus dem Produkt der beiden Sternwiderstände der beteiligten Knoten, dividiert durch die Parallelschaltung aller Sternwiderstände.

(Anmerkung: Die gewonnenen Umrechnungsformeln müßten noch bei den nicht zum Vergleich benutzten Koeffizienten eingesetzt werden, um die Widerspruchsfreiheit zu überprüfen.)

Berechnung der Sternwiderstände aus einer gegebenen Dreieckschaltung

Für die Umrechnung der Dreieckwiderstände in jene der Sternschaltung benutzen wir die eben gewonnenen Formeln und bilden zunächst die Summe der Dreieckwiderstände. Wir bezeichnen diese Summe als den Umlaufwiderstand R_{123} :

$$R_{123} = R_{12} + R_{23} + R_{13} = \frac{1}{R_0} \cdot (R_{10} \cdot R_{20} + R_{20} \cdot R_{30} + R_{10} \cdot R_{30})$$

Benutzt man auf der rechten Seite statt Widerständen die Leitwerte (Kehrwert!), so wird

$$R_{123} \;=\; G_0 \cdot (\frac{1}{G_{10} \cdot G_{20}} + \frac{1}{G_{20} \cdot G_{30}} + \frac{1}{G_{10} \cdot G_{30}}) \;=\; G_0 \cdot (\frac{G_{10} + G_{20} + G_{30}}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}})$$

Hierbei finden wir im Zähler wieder die Summe der Leitwerte der Sternschaltung, also den Sternleitwert G_0 . Es ergibt sich also

$$R_{123} \;=\; \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}} \qquad \text{Gl. 6}$$

Aus dem Produkt aus R_{12} und R_{13} ergibt sich unter Verwendung der Leitwerte

$$R_{12} \cdot R_{13} \;=\; \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_0} \cdot \frac{R_{10} \cdot R_{30}}{R_0} \;=\; \frac{G_0^2}{G_{10}^2 \cdot G_{20} \cdot G_{30}} \;=\; \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}} \cdot \frac{1}{G_{10}}$$

$\frac{1}{G_{10}}$ entspricht dem Sternwiderstand R_{10} .

Der Umlaufwiderstand R_{123} aus Gl. 6 ist ebenfalls in der Gleichung enthalten. Daher ergibt sich:

$$R_{12} \cdot R_{13} = R_{123} \cdot R_{10} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{123}}}$$

Analog läßt sich über das Produkt aus R_{12} und R_{23} eine Gleichung für R_{20} finden:

$$R_{12} \cdot R_{23} = \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_0} \cdot \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_0} = \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20}^2 \cdot G_{30}} = \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}} \cdot \frac{1}{G_{20}}$$

$$R_{12} \cdot R_{23} = R_{123} \cdot R_{20} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{123}}}$$

Und mit dem Produkt aus R_{23} und R_{13} ergibt sich R_{30} :

$$R_{23} \cdot R_{13} = \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_0} \cdot \frac{R_{10} \cdot R_{30}}{R_0} = \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}^2} = \frac{G_0^2}{G_{10} \cdot G_{20} \cdot G_{30}} \cdot \frac{1}{G_{30}}$$

$$R_{23} \cdot R_{13} = R_{123} \cdot R_{30} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{R_{30} = \frac{R_{23} \cdot R_{13}}{R_{123}}}$$

Auch hier sind die umrahmten Formeln wieder die gesuchten Umrechnungsvorschriften zum ermitteln der Dreieckswiderstände aus vorgegebenen Sternwiderständen.
Es ist wieder eine Systematik zu erkennen:
Ein Sternwiderstand ergibt sich aus dem Produkt der beiden Dreieckswiderstände, welche von der Klemme wegführen, dividiert duch die Reihenschaltung aller Dreieckswiderstände.